УДК 534.2

**ЛОКАЛИЗАЦИЯ СПЕКТРА РАССЕЯНИЯ С ПОМОЩЬЮ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ РАССЕЯНИЯ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ**

**В.Н. Чуков**

*Институт Биохимической физики имени Н.М. Эмануэля Российской Академии наук (г. Москва)*

*vchukov@mail.ru*

*Теоретически получена локализация спектра рассеяния поверхностной акустической волны Рэлея в произвольной области частот: от рэлеевского предела до предела Лауэ-Брэгга-Вульфа. В рамках топологических законов рассеяния волны Рэлея использована цилиндрически симметричная шероховатость в форме модулированных полиномов Чебышёва, взятых в качестве элементарной ячейки решётки Пруэ-Туэ-Морса.*

ВВЕДЕНИЕ

Формирование спектра рассеяния волн, в частности, поверхностной акустической волны Рэлея [1 – 3], на основе известных законов рассеяния волн [1 – 15] вызывает интерес в разных областях экспериментальной и теоретической физики и техники [16 – 25]. В работах [26 – 37] получены новые топологические законы рассеяния волны Рэлея на поверхностных шероховатостях и неоднородностях в пределах Рэлея и Лауэ-Брэгга-Вульфа, позволяющие впервые в литературе моделировать произвольный спектррассеяния волны Рэлея в указанных пределах. Данные законы создают базисы амплитуд рассеяния в пределах Рэлея и Лауэ-Брэгга-Вульфа. В последнем случае – независимо для осцилляций амплитуды рассеяния и их огибающей. Тем самым они формируют аналогию с квантовой механикой, широко использующей базисные вычисления и теорию рассеяния на финитном (занимающем конечную область, т.е., локализованном) потенциале [23]. В настоящей работе исследуется совместное влияниеуказанных топологических законов на поведение спектра рассеяния в широком диапазоне значений параметра Рэлея, то есть, отношения размера неоднородной области к длине волны, в интервале между указанными пределами рассеяния [26, 27,37]. Необходимо заметить, что условия резонансного рассеяния Лауэ [4], использовавшего [8], как он сам отмечает в [7], и закон зеркального резонансного отражения Брэгга [5], опубликовавшего его одновременно с российским известным физиком Георгием Викторовичем Вульфом [6], удовлетворяющий условиям Лауэ, вследствие их родства как физическое условие фазового синхронизма рассеянных волн, названы в настоящей работе законами Лауэ-Брэгга-Вульфа вслед их названию Лауэ-Брэгга в юбилейном сборнике [9] (страница 253), содержащем также английский перевод оригинальной статьи [4].

1. ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ

 Пусть полубесконечная изотропная упругая среда со свободной поверхностью занимает полупространство

$x\_{3}\geq 0, $ (1)

 $\vec{x}=\left(x\_{1},x\_{2},x\_{3}\right)$ есть радиус-вектор в декартовой системе координат. Среда имеет поверхностную шероховатость, занимающую область конечного размера. Шероховатость является детерминированной (нестатистической) по обеим координатам и описывается следующей функцией

 $x\_{3}=f\left(x\_{1},x\_{2}\right)=δ\_{0}f\_{||}\left(\vec{x}\_{||}\right)≡δ\_{0}f\_{0}\left(x\_{||}\right),$ (2)

 где $\vec{x}\_{||}=\left(x\_{1},x\_{2,}0\right)$; $f\_{||}\left(\vec{x}\_{||}\right)$ есть произвольная детерминированная безразмерная функция; $δ\_{0}$ – нормировочная амплитуда шероховатости, имеющая размерность длины; является цилиндрически симметричной, так как зависит только от $x\_{||}=\left|\vec{x}\_{||}\right|$.

Пусть следующая поверхностная акустическая волна Рэлея [2], являющаяся связанным состоянием продольной волны и поперечной волны вертикальной поляризации, распространяется вдоль положительного направления оси  и падает на шероховатый участок поверхности (2)

 $u\_{μ}^{\left(0\right)}\left(x,t\right)=u\_{μ}^{\left(0\right)}\left(\vec{k}\_{||}^{\left(0\right)},ω, x\_{3}\right)e^{i\vec{k}\_{||}^{\left(0\right)}\vec{x}\_{||}-iωt},        μ=1,2,3;$ (3)

 где $\vec{k}\_{||}^{\left(0\right)}=\left(k\_{R};0;0\right)$; $ω$, $c\_{R}$ есть угловая частота и скорость волны Рэлея соответственно;

$$u\_{1}^{\left(0\right)}=A^{\left(0\right)}\left(e^{-αk\_{R}x\_{3}}-γe^{-βk\_{R}x\_{3}}\right); u\_{2}^{\left(0\right)}=0; u\_{3}^{\left(0\right)}=iαA^{\left(0\right)}\left(e^{-αk\_{R}x\_{3}}-\left(1/γ\right)e^{-βk\_{R}x\_{3}}\right),$$

$α=\left(1-c\_{R}^{2}/c\_{l}^{2}\right)^{1/2}; β=\left(1-c\_{R}^{2}/c\_{t}^{2}\right)^{1/2}$; $γ=1-c\_{R}^{2}/\left(2c\_{t}^{2}\right);$ $αβ=γ^{2};$ $k\_{R}=ω/c\_{R},$

 $c\_{t,l}$ – скорости поперечной и продольной объёмных акустических волн соответственно [1],  – комплексная амплитуда. Только действительная часть комплексного выражения (3) имеет физический смысл поля смещения в волне Рэлея [2]. Все обозначения физических величин в настоящей работе совпадают с [37]. В результате рассеяния падающей волны Рэлея (3) на шероховатости (1), (2) на больших расстояниях от шероховатости по сравнению с радиусом шероховатой области $d$ образуется рассеянная цилиндрическая рэлеевская волна и сферические объёмные продольная и поперечная волны (см. ссылку [1] в [37]). В настоящей работе, как и в [26 – 37], исследуется только рассеянная рэлеевская волна. Выражение для вектора смещения в ней приведено в [37] (формулы (13) – (16) в [37]). С помощью решения данной задачи рассеяния, справедливом во всей области частот от рэлеевского [1], т.е., длинноволнового $ƛ \gg d$ предела, до предела Лауэ-Брэгга-Вульфа [4 – 11] $ƛ \ll d$, необходимо исследовать влияние новых по сравнению с [1 – 11] топологических законов рассеяния волны Рэлея [26 – 37], формулы (29) – (32) и (33) – (39) работы [37] соответственно (или в более общем виде (27) – (32) в [33] и (15) – (18) в [30] для рэлеевского предела; и (32) – (34) в [30] для предела Лауэ-Брэгга-Вульфа).

1. ЛОКАЛИЗАЦИЯ СПЕКТРА РАССЕЯНИЯ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ

Возьмём в качестве шероховатости $f\_{0}\left(x\_{||}\right)$ (2) последовательность Пруэ-Туэ-Морса [26, 28, 34 – 37]. В [26] впервые в литературе установлено, что она обладает свойством занулять одновременно заданное наперёд количество своих пространственных моментов, задавая тем самым топологию шероховатостей, отличной от рэлеевской топологии. Последняя определяется отличием среднего значения шероховатости от нуля. Для цилиндрически симметричной шероховатости (2) частотная зависимость индикатрисы рассеяния ((18), (19) в [37]; (2), (3) в [33]) есть $I\_{||,3}^{\left(R\right)}∼\left(d/ƛ\right)^{4\left[n/2\right]+5}$ , где $n=0,1,2,…$ – число переворотов всей предыдущей части последовательности Пруэ-Туэ-Морса относительно оси абсцисс (формулы (1) – (18)) в [29], […] – целая часть числа. $\left(n-1\right)$ есть порядок момента шероховатости, вплоть до которого, включительно, равны нулю все моменты шероховатости. $n=0$ соответствует рэлеевской топологии, $n=1$ – равно нулю только среднее значение шероховатости. $n$ – й момент шероховатости для последовательности Пруэ-Туэ-Морса отличен от нуля (формулы (33) – (37) в [35]). Таким образом, $n$ определяет порядок пространственной статистической симметрии шероховатости. $n>0$ даёт новые топологические законы рассеяния волны Рэлея, то есть, мета-рэлеевское рассеяние [34]. Для цилиндрически симметричной шероховатости (2) имеют значение только нечётные моменты шероховатости [26, 28 , 34 – 37]. Возьмём в качестве элементарной ячейки $ψ\_{0}$ шероховатости в виде последовательности Пруэ-Туэ-Морса ((49) – (52) в (37) модулированные полиномы Чебышёва [37]. В виде [37] (формулы (49) – (52) в [37]) сама такая элементарная ячейка не изменяет порядок пространственной статистической симметрии шероховатости, так как весовая функция, с которой ортогональны полиномы Чебышёва не входит в данное определение $ψ\_{0}$. Но быстро осциллирующие полиномы позволяют дополнительно управлять значением отличного от нуля $n$ – го момента шероховатости путём изменения порядка полинома Чебышёва. Полученная таким образом шероховатость позволяет дополнительно подавлять рассеяние в рэлеевской области, увеличивая $n$. В то же время, последовательность Пруэ-Туэ-Морса есть периодическая решётка, состоящая из $2^{n}$ звеньев. Но согласно новым топологическим законам, то есть, мета-рассеянию Лауэ-Брэгга-Вульфа, рассеяние волны Рэлея в пределе Лауэ-Брэгга-Вульфа происходит на разрывах шероховатости или её производных наименьшего порядка $n\_{d},$ включая нулевой, отличных от нуля. Не каждый узел решётки Пруэ-Туэ-Морса является таким разрывом. Поэтому решётка Пруэ-Туэ-Морса является непериодической, которая также подчиняется закону Лауэ-Брэгга-Вульфа, но для виртуальной периодической решётки, часть узлов которой совпадает с реальной непериодической решёткой разрывов Пруэ-Туэ-Морса, а для остальных виртуальных узлов амплитуды разрывов равны нулю [31]. Таким образом, вступают в силу новые топологические законы, т.е., мета-рассеяние Лауэ-Брэгга-Вульфа. Согласно данным законам зависимость огибающей высокочастотных осцилляций индикатрисы рассеяния в пределе Лауэ-Брэгга-Вульфа есть $I\_{||,3}^{\left(R\right)}∼\left(d/ƛ\right)^{2-2n\_{d}}$. При $n\_{d}=0$, когда высокочастотное рассеяние происходит на решётке разрывов самой шероховатости, а не её производных, получается классический нелокализованный по параметру Рэлея $d/ƛ$ спектр рассеяния, изображённый на рисунках 1 – 4 в [37]. При $n\_{d}>1$ согласно новым топологическим законам, т.е., мета-рассеянию Лауэ-Брэгга-Вульфа, огибающая убывает с ростом параметра Рэлея $d/ƛ$. Это не было известно Лауэ, Брэггу и Вульфу [4 – 14].

Таким образом, варьируя $n$ для решётки Пруэ-Туэ-Морса и $n\_{d}=n\_{0}$ (формулы (49) – (53) в [37]), определяющее порядок производной, на разрывах которой происходит рассеяние волны Рэлея, для модулированных полиномов Чебышёва в качестве элементарной ячейки решётки Пруэ-Туэ-Морса, можно локализовать спектр рассеяния по параметру Рэлея $d/ƛ$ в произвольной области между пределами Рэлея и Лауэ-Брэгга-Вульфа. Данная локализация спектра рассеяния волны Рэлея представлена на рисунке 29 в [37]. Соответствующие аналитические выражения для индикатрисы рассеяния даны формулами (53) в [37].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые в литературе теоретически получена локализация спектра рассеяния поверхностной акустической волны Рэлея на поверхностной шероховатости изотропного твёрдого тела путём использования новых топологических законов рассеяния в пределах Рэлея и Лауэ-Брэгга-Вульфа, т.е., мета-рэлеевского рассеяния и мета-рассеяния Лауэ-Брэгга-Вульфа [34, 37]. Указанное физическое явление может быть использовано в разных областях экспериментальной и теоретической физики [1 – 25] и в технике для разработки новых технологий, в частности в акустоэлектронике [17, 18]; акустической микроскопии [15, 25]; рентгенографии [14]; для фокусировки волнового излучения путём конструирования рассеивающих решёток, например, методом лазерной литографии [16, 19]; в сонолюминисценции и физике люминисценции в целом [20]; в физике акустических метаматериалов [21]; в сейсмологии для создания ловушек сейсмических волн [22], в медицине [25].

Работа выполнена в рамках Госзадания НИОКТР № 122041400112-8, код темы FFZR-2022-0012.

**Л И Т Е Р А Т У Р А**

1. Стретт, Дж.В. (Лорд Рэлей). Теория звука. Т.1,2. М: Гостехиздат, 1955.
2. Lord Rayleigh. // Proc. London Math. Soc. – 1885. – V.17. – P.4.
3. Lord Rayleigh. // Proc. Royal. Soc. London. – 1907. – V.A79. – P.399.
4. Laue, M, Friedrich, W., Knipping, P. // Ber. Bayer. Akad. –1912. – V.363. – P.303.
5. Bragg, W.L. // Proc. Camb. Philos. Soc. ­­– 1913. – V.17. – P.43.
6. Wulff, G.V. // Physikalische Zeitschrift. – 1913. – V.14. – P.217.
7. Лауэ, М. История физики. M: Гостехиздат, 1956.
8. Schwerd, F.M. Beugungserscheinungen Aus Den Fundamentalgesetzen der Undulationstheorie. Mannheim, 1835.
9. Laue, M., Friedrich, W., Knipping, P.. In: X-Ray and Neutron Diffraction (in English) / G.E. Bacon (Ed.). Pergamon Press, 1966. P.253.
10. Bijvoet, J.M., Burgers, W.G., Hagg, G. (Eds.). Early Papers on Diffraction of X-Rays by Crystals. V.I. Springer, 1969. 372 p. V.II. Springer, 1972. 484 p.
11. Ewald, P.P. // Acta Cryst. – 1969. – V.A25. – P.103.
12. Ньютон, Р. Теория рассеяния волн и частиц. М: Мир, 1969. С.62.
13. Бирюков, С.В., Гуляев, Ю.В., Крылов, В.В., Плесский, В.П.. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М: Наука, 1991.
14. Robinson, I.K., Tweet, D.J. // Rep. Prog. Phys. – 1992. – V.55. – P.599.
15. Maev, R.G. Acoustic Microscopy. Fundamentals and Applications, Weinheim: Wiley-VCH, 2008.
16. Goray, L.I., Berezovskaya, T.N., Mokhov, D.V., et.al. // J. Surf. Invest.: X-Ray, Synchrotron Neutron Tech. – 2023. – V.17. – Suppl.1. – P.S104.
17. Morgan, D., Paige, E.G.S. Surface acoustic wave filters. Elsevier, 2007.
18. Кайно, Г. Акустические волны. Устройства, визуализация, и аналоговая обработка сигналов. М.: Мир, 1990.
19. Шур, В.Я., Ахматханов, А.Р., Чувакова, М.А., Лисьих, Б.И., Кособоков, М.С., Бойко, А.А. Сборник научных трудов XIV международной конференции по фотонике и информационной оптике. 29-31 января 2025, Москва, Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ.
20. Паперный, В.Л., Черных, А.А., Раджабов, Е.А., Мартынович, Е.Ф., Дресвянский, В.П. Материалы XX международной молодёжной конференции по люминисценции и лазерной физике. Иркутск, Россия, 30 июня – 5 июля 2025 г. С. 55.
21. Deymier, P.A. (Ed.). Acoustic metamaterials and phononic crystals. Springer, 2013.
22. Sarris, G., Haslinger, S.G., Huthwaite P. et al. // J. Acoust. Soc. Am. – 2021. – V.149. – P.4298.
23. Shirokov, A.M., Mazur, A.I., Mazur, I.A., Vary, J.P. // Phys. Rev. – 2016. – V.C94. – P.064320. DOI: 10.1103/PhysRevC.94.064320
24. Емельянцев, П.С., Пышков, Н.И., Свяховский, С.Е. // Письма в ЖЭТФ. – 2023. – Т.117. – N.11. – С.826.
25. Храмцова, Е.А., Мороков, Е.С., Григорьев, Т.Е., Губарева, Е.А., Сотниченко, А.С., Куевда, Е.В., Левин, В.М., Петронюк, Ю.С. // Учёные записки Физического факультета Московского университета. – 2017. – N.5. – C.1750710.
26. Chukov, V.N., Surface Roughness Structure and Rayleigh Scattering Laws of Rayleigh Wave. Preprint. IBCP RAS. Moscow: Lebedev Physical Institute 2003. 36p. (Russian State Library).
27. Chukov, V.N. in: Days on diffraction`2009. International Conference. Abstracts. St.-Petersburg: Universitas Petropolitana MDCCXX V, 2009. C.7.
28. Chukov, V.N. Proc. “Days on Diffraction” Int. Seminar. St. Petersburg. 2011. P.55. https://doi.org/ 10.1109/DD.2011.6094365.
29. Chukov, V.N. // Ultrasonics. – 2012. – V.52. – No.1. – P. 5.
30. Chukov, V.N. Topological laws of the Rayleigh wave scattering. Beau Bassin: Lambert Academic Publishing, 2018. ISBN: 978-613-9-84837-9.
31. Чуков, В.Н. Сборник трудов Всероссийской Акустической конференции. Санкт-Петербург: Политех-Пресс, 2020. С. 87. https://acoust-conference.iapras.ru
32. Chukov, V.N. // St. Petersburg Polytechnic University Journal. Physics and Mathematics. – 2023. – V.16. – No.1.2. – P.557. DOI: https://doi.org/10.18721/JPM.161.285.
33. Чуков, В.Н. Новые законы диффузного рассеяния волны Рэлея и нарушение закона Лауэ-Брэгга-Вульфа. Препринт. ИБХФ РАН. Москва: ООО “Паблит”, 2023. ISBN: 978-5-6049489-7-2 (ИБХФ РАН), 978-5-16-019405-9 (ИНФРА-М). (Российская государственная библиотека).
34. Chukov, V.N. // Russ. Phys. J. – 2024. – V.67. – P.1787.
35. Chukov, V.N. // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. – 2025. – V.89. – No.1. – P.96.
36. Chukov, V.N. // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2025. – V.18. – No.5. – P.1.
37. Chukov, V.N. Meta-Rayleigh and topological diffuse scattering of the Rayleigh wave on deterministic cylindrical roughness with spatial statistical symmetry of an arbitrary order. Preprint. IBCP RAS. Moscow: “Publit”, 2024. ISBN: 978-5-6051794-7-4. (The Russian State Library.)